

DIFRACT: *Un nuevo laboratorio virtual para la modelización matemática de las propiedades de difracción de redes fractales*

M.H. Giménez, J.A. Monsoriu, F. Giménez

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

mhgimene@fis.upv.es, jmonsori@fis.upv.es, fgimenez@mat.upv.es

A. Pons, J.C. Barreiro, W.D. Furlan

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

amparo.pons-marti@uv.es, juan.barreiro@uv.es, walter.furlan@uv.es

Abstract

En este trabajo presentamos un nuevo laboratorio virtual, DIFRACT, desarrollado con Easy Java Simulations para su uso en cursos de Óptica como una herramienta informática para la modelización matemática de las propiedades de difracción de redes fractales 1D y 2D. Este laboratorio virtual permite a los estudiantes analizar rápida y fácilmente la influencia en el patrón de difracción de Fraunhofer de los diferentes parámetros de construcción de la red fractal. Como ejemplo de aplicación se ha considerado el conjunto fractal de Cantor.

This work presents a new virtual laboratory, DIFRACT, developed with Easy Java Simulations, for using in Optics courses as a computer tool for the mathematical modelling of the diffraction properties of 1D and 2D fractal gratings. This virtual laboratory enables students to quickly and easily analyze the influence on the Fraunhofer diffraction pattern of the different construction parameters of the fractal grating. As an application example, the Cantor fractal set has been considered.

Keywords: Easy Java, Fractal, Patrón de Difracción, Conjunto de Cantor.

1 Introducción

En los últimos años el estudio de los fractales ha atraído la atención de investigadores, alentados por el hecho de que muchos fenómenos físicos pueden ser analizados y descritos mediante un enfoque fractal [1]. En la óptica, las estructuras fractales, que van desde simples sistemas unidimensionales [2] hasta objetos complejos bidimensionales [3] han sido ampliamente estudiados. En concreto, se han analizado redes de difracción basadas en las secuencias del fractal del conjunto de Cantor [4]. El perfil fractal de estas estructuras genera unos patrones de difracción Fraunhofer con propiedades de autosimilitud, es decir, la variación del espectro de la frecuencia espacial en cada etapa superior es una versión modulada de la que se asocia con la etapa inferior con una escala apropiada de la gama de frecuencias. Como consecuencia de esta propiedad fractal, estas estructuras presentan un cierto número de picos de difracción subsidiarios alrededor de los picos principales. Esta característica de autosimilitud se ha obtenido también con otros elementos de óptica difractiva como, por ejemplo, diferentes tipos de lentes difractivas fractales [5]. Desde el punto de vista pedagógico, una forma sencilla de estudiar las propiedades de difracción de redes ópticas es mediante laboratorios virtuales. Estos laboratorios proporcionan ventajas significativas en educación, como por ejemplo la interactividad y la respuesta dinámica. Estos laboratorios dan a los estudiantes medios para desarrollar su propia comprensión del fenómeno a estudiar [6]. Para esta tarea, el laboratorio virtual permite a los usuarios controlar de las variables del proceso para analizar y asimilar los distintos conceptos y, además, puede mostrar todo tipo de información gráfica. En este artículo se presenta un nuevo laboratorio virtual desarrollado a partir de la herramienta Easy Java Simulations [7], basados en las aplicaciones physlets de Open Source Physics [8]. El applet desarrollado permite analizar las propiedades de autosimilitud de los patrones de difracción de Fraunhofer producido por redes fractales y compararlos con los correspondientes de redes periódicas convencionales.

2 Fundamento teórico

Uno de los fractales más simples es el conjunto triádico de Cantor, que se muestra en la figura 1, el cual se puede obtener por medio de una construcción iterativa. En la primera etapa de generación ($S = 0$) se toma un segmento de longitud unidad. En la siguiente etapa ($S = 1$) dividimos el segmento en tres partes iguales de longitud $1/3$ y eliminamos la central. En general, en la fase S hay 2^S segmentos de longitud 3^{-S} con $2^S - 1$ espacios intermedios. En la fase $S + 1$ se divide cada uno de estos segmentos en tres partes de longitud de 3^{-S-1} y se eliminan los centrales. Basándonos en el esquema anterior proponemos redes fractales cuya distribución espacial se define a partir del conjunto de Cantor. Sean S_1 y S_2 las etapas de generación fractal correspondientes a los conjuntos de Cantor que definen la estructura horizontal y verticalmente respectivamente. Denotaremos por a y b la anchura y altura de cada uno de las rendijas que forman la red. Consideremos ahora que la red, cuya transmitancia denotaremos por $t(x, y)$, es iluminada por una onda plana monocromática con longitud de onda λ . El patrón de difracción de Fraunhofer se genera en el plano focal posterior de una lente colocada tras la red. Dentro de la aproximación escalar, la distribución de la irradiancia focal está dada por la transformación de Fourier de la función de transmitancia [9],

$$I(x, y) = \left(\frac{A}{\lambda f}\right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{+\infty} t(x_0, y_0) \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f}(xx_0 + yy_0)\right) dx_0 dy_0 \right|^2 \quad (17.1)$$

donde f es la distancia focal de la lente y A es la amplitud de la onda plana incidente. Utilizando la transmitancia correspondiente a una red fractal de Cantor y realizando los cambios de coordenadas $u = (a/\lambda f)x$ y $v = (b/\lambda f)y$, la irradiancia resultante es:

$$I_F = \left(\frac{1}{4^{S_1}} \prod_{i=1}^{S_1} \frac{\text{sen}^2(4\pi u 3^{S_1-i})}{\text{sen}^2(2\pi u 3^{S_1-i})} \text{senc}^2(u) \right) \left(\frac{1}{4^{S_2}} \prod_{i=1}^{S_2} \frac{\text{sen}^2(4\pi v 3^{S_2-i})}{\text{sen}^2(2\pi v 3^{S_2-i})} \text{senc}^2(v) \right) \quad (17.2)$$

donde $\text{senc}(x) = \text{sen}(x)/x$. Análogamente, para red periódica equivalente, la ecuación 17.1 proporciona:

$$I_P(u, v) = \left(\frac{1}{M_1^2} \frac{\text{sen}^2(M_1 2\pi u)}{\text{sen}^2(2\pi u)} \text{senc}^2(u) \right) \left(\frac{1}{M_2^2} \frac{\text{sen}^2(M_2 2\pi v)}{\text{sen}^2(2\pi v)} \text{senc}^2(v) \right) \quad (17.3)$$

donde M_1 y M_2 son el número de rendijas transparentes horizontales y verticales definidos por $[3^{S_1}/2]$ y $[3^{S_2}/2]$, respectivamente, donde $[x]$ denota el entero más pequeño mayor o igual que x .

3 El laboratorio virtual

En la figura 3 puede observarse la interfaz del applet desarrollado [10]. A continuación detallamos los parámetros de entrada y salida del laboratorio virtual:

INPUT:

- A** . Orden fractal en el eje horizontal S_1 .
- B** . Orden fractal en el eje horizontal S_2 .
- C** . Selección de fractal 2D regular $S_1 = S_2$.
- D** . Valor mínimo representado del patrón de difracción normalizado.
- E** . Valor máximo representado del patrón de difracción normalizado.
- F** . Selección del patrón de difracción en escala logarítmica (dB).
- G** . Restablecer valores predeterminados.

OUTPUT:

- H** . Red de difracción fractal de orden S_1 en el eje horizontal y orden S_2 en el eje vertical.
- I** . Patrón de difracción $I_F(u, v)$ de la red fractal H representada en la variable horizontal $u = ax/\lambda f$ y vertical $v = by/\lambda f$ donde a y b son, respectivamente, el ancho y alto de las rendijas de la red. El rango de u y v está limitado a $[-1, 1]$. Para el cálculo del patrón de difracción se ha tenido en cuenta la ecuación 17.2.
- J** . Red de difracción periódica equivalente a H.
- K** . Patrón de difracción $I_P(u, v)$ de la red periódica J utilizando las mismas variables normalizadas que en I. Para el cálculo del patrón de difracción se ha tenido en cuenta la Ecuación 17.3.

Haciendo uso de la ecuación 17.2, la figura 4 muestra los patrones de difracción correspondientes a un fractal unidimensional ($S_2 = 0$) basado en el conjunto triádico de Cantor. Nótese que el patrón de difracción para diferentes etapas de generación fractal S presenta órdenes de difracción autosimilares, es decir, la respuesta para $S = 1$ forma la envolvente para $S = 2$, y ésta a su vez la de $S = 3$. En el caso particular de que la red fractal sea simétrica ($S_1 = S_2$) a la figura resultante recibe el nombre de “Polvo de Cantor”. La figura 5 muestra los patrones para este caso. En el patrón de difracción generado, la respuesta autosimilar del sistema también se preserva. Nótese por ejemplo cómo los 9 picos de difracción de $S = 1$ aparecen en cada uno de los órdenes de $S = 2$ y $S = 3$ escalados con factor reductor 3 y 9, respectivamente, en cada dirección.

4 Conclusiones

DIFRACT constituye un nuevo laboratorio virtual para el estudio de las propiedades de difracción de redes fractales. Desde el punto de vista pedagógico, los fractales constituyen un claro elemento motivador para los estudiantes, siendo además de un marcado carácter multidisciplinar, ya que permiten unir la docencia de la óptica con las matemáticas.

Agradecimientos. Agradecemos la financiación económica recibida del Ministerio de Ciencia y Tecnología (DPI2008-02953), la Generalitat Valenciana (PROMETEO2009-077 y ACOMP/2010/052) y la Universidad Politécnica de Valencia (PAID-05-09 y PAID-06-08). Este trabajo ha sido desarrollado por el Grupo de Innovación Docente e-MACAFI de la Universidad Politécnica de Valencia y el Grupo de Innovación Docente en Óptica (GCID35/2009, DocInvest 87/DI/05/2010) de la Universitat de València.

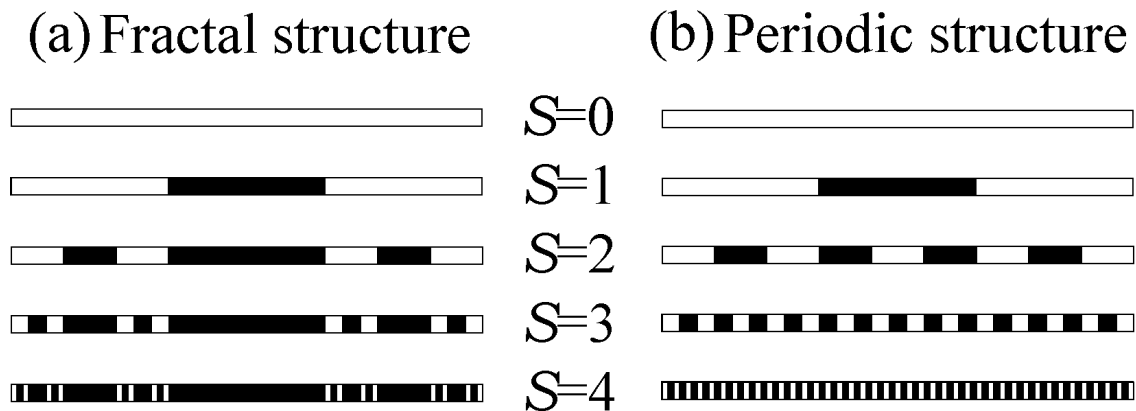


Figura 1: Conjunto de Cantor Triádico (izquierda) y la estructura periódica equivalente (derecha).

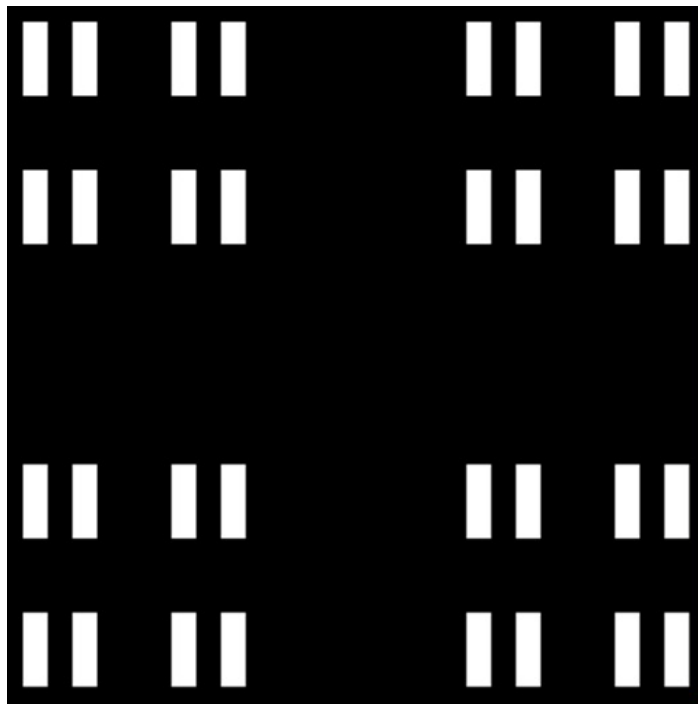


Figura 2: Red fractal 2D basada en el Conjunto de Cantor Triádico.

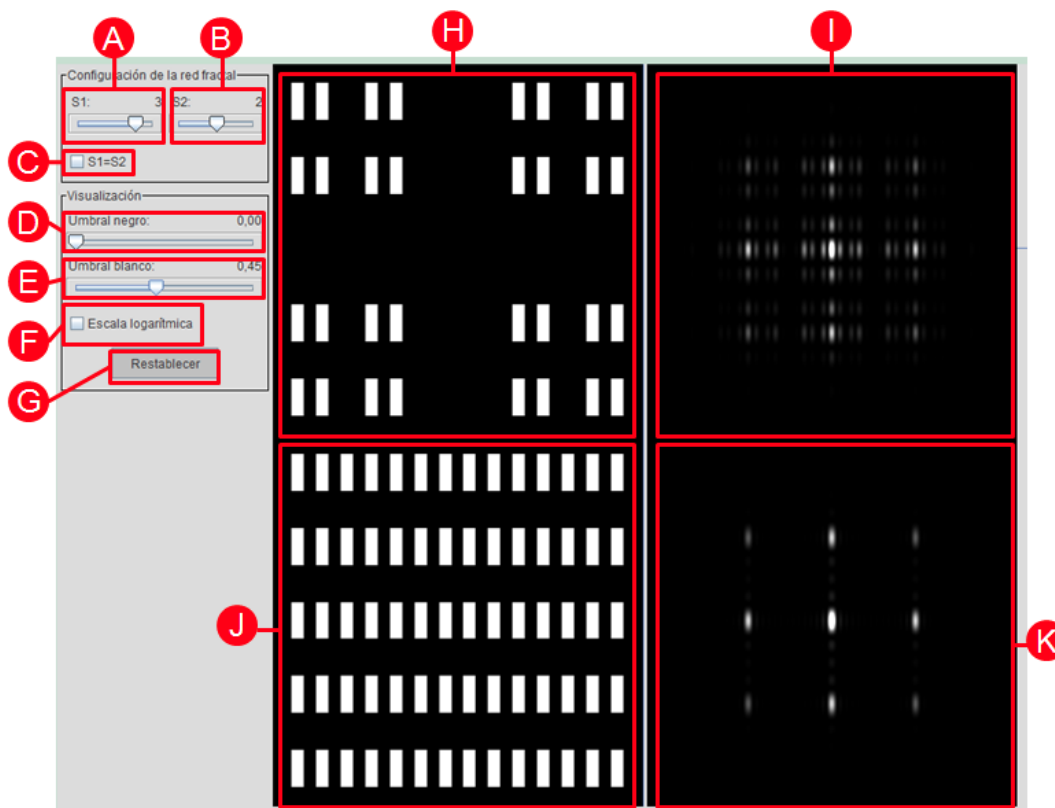


Figura 3: Interfaz de usuario de DIFRACT.

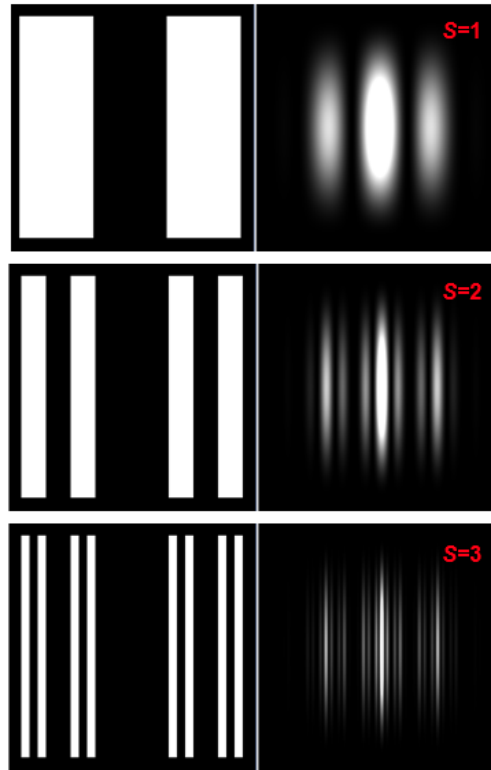


Figura 4: Fractal 1D Conjunto de Cantor Triádico.

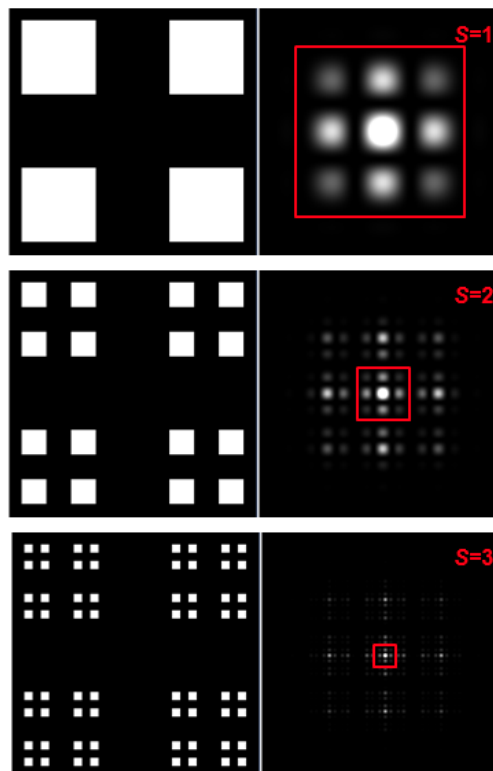


Figura 5: Fractal 2D Polvo de Cantor.

Referencias

- [1] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco, Calif., 1982).
- [2] Y. Sakurada, J. Uozumi y T. Asakura, *Fresnel diffraction by 1-D regular fractals*, Pure Appl. Opt. 1, 29-40 (1992).
- [3] J. Uozumi, K-E. Peiponen, M. Savolainen y R. Silvennoinen, *Demonstration of diffraction by fractals*, Am. J. Phys. 62 (3), 283-285 (1994).
- [4] M. Lehman, *Fractal diffraction gratings built through rectangular domains*, Opt. Commun. 195, 11-26 (2001).
- [5] G. Saavedra, W.D. Furlan y J.A. Monsoriu, *Fractal zone plates*, Opt. Lett. 28 (12), 971-973 (2003).
- [6] A. Jimoyainni y V. Komis, *Computer simulations in physics teaching and learning*, Computers & Education 36, 183-204 (2001).
- [7] <http://www.um.es/fem/Ejs/>
- [8] <http://www.opensourcephysics.org/>
- [9] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*(McGraw-Hill, New York, 1996).
- [10] <http://personales.upv.es/mhgimene/redesfractales/redesfractales.html>

