

SUPLEMENTO ESPECIAL 4

Potenciales cuánticos periódicos y fractales

Juan A. Monsoriu, F. R. Villatoro y M. J. Marín

En el capítulo 4 se ha estudiado la dispersión de partículas cuánticas en varios pozos de potencial. En este suplemento vamos a abordar, en primer lugar, el estudio de potenciales cuánticos periódicos con vistas a analizar lo que ocurre en una red cristalina, algo fundamental en física del estado sólido. Por difracción de rayos X se ha podido determinar que toda estructura cristalina está constituida por una red periódica de átomos. En el modelo de un electrón libre no se tienen en cuenta los efectos de los iones positivos de esta red. Recordemos que cuando un electrón pasa cerca de un ión es acelerado, y cuando se aleja es desacelerado hasta que entra dentro del campo de acción del próximo ión, estableciéndose niveles de energía potencial que delimitan el movimiento del electrón a través de la red. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica un electrón en un cristal se encuentra en un potencial periódico del tipo mostrado en la figura 4.1(a). Una aproximación a este problema nos lo proporciona el modelo de Kronig-Penney que consiste en un potencial periódico formado por barreras rectangulares de potencial de ancho b , separadas una distancia a , y que tienen la periodicidad de la red, de forma que el periodo será $L = a + b$, tal y como se muestra en la fig. 4.1(b).

La solución a este problema requiere resolver la ecuación de Schrödinger en las

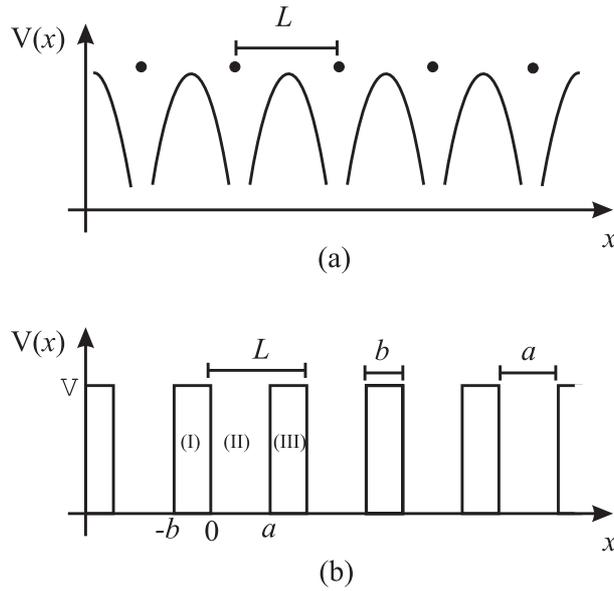


Figura 4.1: Potencial real en una red cristalina (a), y modelo de Kronig Penney (b).

tres regiones indicadas en la fig. 4.1(b), de forma tal que

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x},$$

con

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar}}, \quad \text{y} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}.$$

donde A_1 , B_1 , A_2 , y B_2 , son coeficientes constantes. En la región (III) la solución se puede obtener aplicando las condiciones con contorno impuestas por el Teorema de Bloch (véase sec. 4.7),

$$\psi(x) = u(x) e^{ikx},$$

donde k es el momento de la onda de Bloch y $u(x)$ es una función periódica de forma que $u(x) = u(x - L)$. Por lo tanto, la función de onda en cualquier punto de la región (III) está relacionada con la función de onda de la región (I) a través de la

expresión

$$\psi_3(x) = \psi_1(x - L) e^{ikL} = \left(A_1 e^{ik_1(x-L)} + B_1 e^{-ik_1(x-L)} \right) e^{ikL}.$$

Imponiendo ahora las condiciones de continuidad de la función de onda y de su derivada en $x = 0$ resulta

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 - k_2 B_2,$$

y de forma análoga en $x = a$ se obtiene

$$A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} = \left(A_1 e^{-ik_1 b} + B_1 e^{ik_1 b} \right) e^{ikL},$$

$$k_2 A_2 e^{ik_2 a} - k_2 B_2 e^{-ik_2 a} = \left(k_1 A_1 e^{-ik_1 b} - k_1 B_1 e^{ik_1 b} \right) e^{ikL}.$$

Así pues, tenemos un sistema lineal de ecuaciones con cuatro incógnitas y homogéneo, por lo que su solución no trivial requiere que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo. Tras operar y simplificar, se obtiene la siguiente ecuación trascendente

$$-\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin(k_1 b) \sin(k_2 a) + \cos(k_1 b) \cos(k_2 a) = \cos(kL). \quad (\text{S4-1})$$

Tomando el lado izquierdo de esta ecuación como una función de la energía, $f(E)$, la condición $f(E) = \cos(kL)$ limita sus posibles valores al intervalo $[-1, 1]$. Sin embargo, como puede verse en la figura 4.2, la función $f(E)$ sólo permanece dentro de ese intervalo para ciertos valores de energías. Estos valores forman las denominadas bandas de energía permitidas. Los valores restringidos de energía forman las denominadas bandas de energía prohibidas o "gap" de energía. El agrupamiento de los valores de energía permitidos en bandas es una de las características más importantes del comportamiento de los electrones en las redes periódicas.

En la figura 4.3 se muestra en línea continua la relación de dispersión de la energía en función del momento de la onda de Bloch asociada y la correspondiente para el electrón libre en línea discontinua. Aunque pueda parecer que para valores de la energía que caen dentro de la banda prohibida la ecuación (S4-1) no tiene solución, esto es falso, ya que las soluciones existen, pero tienen un valor imaginario para

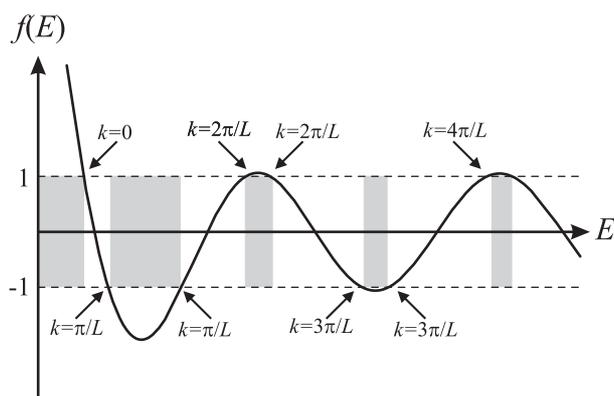


Figura 4.2: Aparición de bandas prohibidas de energía (zonas sombreadas).

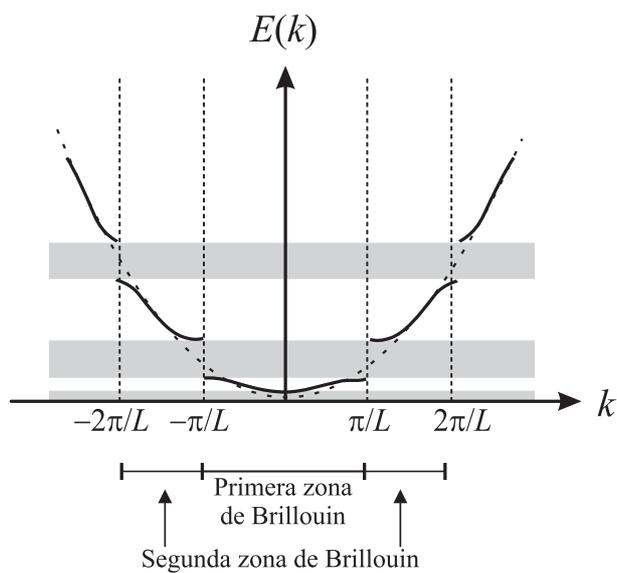


Figura 4.3: Relación de dispersión de una onda de Bloch en un potencial periódico. Las zonas sombreadas delimitan las bandas prohibidas.

el momento, que se denominan ondas de Bloch evanescentes. En esta situación el electrón puede atravesar por efecto túnel un número finito de periodos tal y como veremos a continuación. Para ello nos vamos a apoyar en el método numérico de las matrices de transferencia que presentaremos a continuación y que permite determinar los coeficientes de reflexión y transmisión de partículas cuánticas en pozos de potencial generales mediante su aproximación con funciones constantes a trozos. En este suplemento, además de potenciales periódicos finitos, vamos a considerar también potenciales fractales del tipo conjunto de Cantor, los cuales se pueden generar a partir de los periódicos introduciendo adecuadamente una serie de defectos en la red al eliminar algunas de las barreras de potencial.

Los fractales son objetos geométricos con dimensión no entera y recientemente han atraído bastante la atención de físicos e ingenieros ya que permiten modelar ciertas estructuras naturales complejas. Pongamos algunos ejemplos. Las ramas, hojas y flores de muchos árboles tienen estructura fractal. Objetos atmosféricos tan complejos como los copos de nieve o las nubes, o incluso las fracturas en sólidos, tienen estructura fractal. Las conexiones físicas y lógicas sobre las que está construida Internet también tiene este tipo de estructura. Podríamos mencionar más ejemplos, la mayoría de los cuales no son fractales "verdaderos", sino prefractales. La definición matemática de fractal comprende a estructuras matemáticas auto- semejantes que se obtienen iterando una operación geométrica básica, llamada generador. Este proceso iterativo se repite múltiples veces a diferentes niveles de escala, partiendo de un objeto que se denomina iniciador. Matemáticamente estas operaciones pueden aplicarse una infinidad de veces, generando objetos con detalles a una escala infinitamente pequeña. Sin embargo, en la Naturaleza, necesariamente hay un límite, y el generador sólo se puede aplicar un número finito de veces; los objetos así obtenidos se denominan prefractales o fractales truncados. Este tipo de estructura geométrica es la que se observa en la práctica. Los ingenieros recientemente han empezado a utilizar fractales en múltiples aplicaciones, como antenas fractales, compresión fractal de imágenes, o pupilas ópticas fractales.

Los objetos fractales aparecieron a principios del siglo XX como ejemplos de funciones continuas que no eran derivables en ningún punto, comportamiento que puede parecer anti-intuitivo. En Mecánica Cuántica, la dispersión de partículas en potenciales de este tipo, es decir, fractales, ha sido extensamente estudiada, sobre todo porque permiten modelar sistemas desordenados con cierto orden "intrínseco." ^a diferencia de los sistemas realmente desordenados que son estocásticos. Se ha puesto el

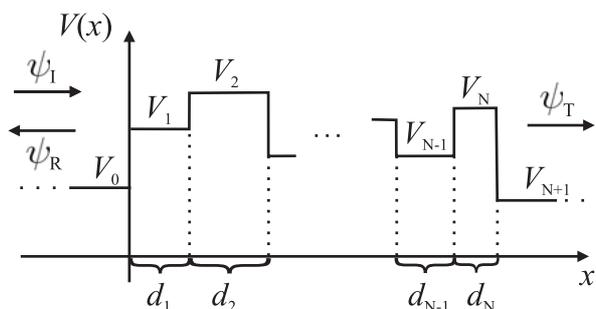


Figura 4.4: Ilustración de un potencial constante a trozos con N pozos de potencial con amplitud V_i y anchura d_i . Los valores constantes en los extremos, V_0 y V_{N+1} , se suponen extendidos hasta infinito.

énfasis en cómo determinar estas propiedades (o simetrías) intrínsecas en la función de onda a partir de sus propiedades experimentalmente medibles, los coeficientes de reflexión y transmisión de la partícula. Una incursión en la teoría física y matemática de la dispersión cuántica en potenciales fractales requiere técnicas mucho más avanzadas de las presentadas en este curso. Sin embargo, en este suplemento mostraremos cómo realizar simulaciones numéricas por ordenador del comportamiento de partículas cuánticas en potenciales fractales utilizando el método de las matrices de transferencia. Para ilustrar dicha técnica, nos centraremos en el potencial fractal más simple, basado en el conjunto de Cantor triádico.

El método que presentaremos permite obtener los parámetros de dispersión de partículas cuánticas en potenciales unidimensionales definidos por funciones constantes a trozos o, en general, que se puedan aproximar a esta forma. El potencial fractal de tipo conjunto de Cantor es un ejemplo sencillo. La técnica que presentaremos en este suplemento puede ser implementada en un programa de ordenador de forma sencilla y directa y permite determinar los coeficientes de reflexión y transmisión de una forma rápida y eficiente.

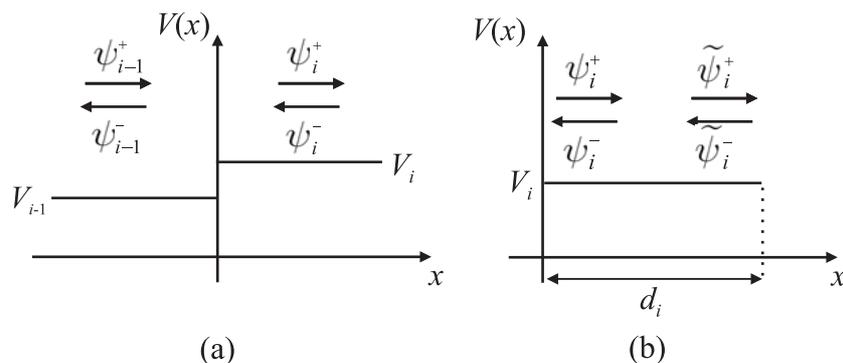


Figura 4.5: (a) Dispersión cuántica en la i -ésima interfaz del potencial constante a trozos entre sus valores V_{i-1} y V_i . (b) Ilustración de la propagación de la función de onda en la región con potencial constante V_i .

4.1. El método de las matrices de transferencia

Consideremos la ecuación de Schrödinger unidimensional independiente del tiempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad (\text{S4-2})$$

donde $\psi(x)$, m y E son, respectivamente, la función de onda, masa y energía de una partícula cuántica, \hbar es la constante de Planck, y $V(x)$ es un pozo de potencial que puede representarse como una función constante a trozos, por ejemplo, con N barreras de potencial como el mostrado en la figura 4.4. Para resolver el problema de dispersión cuántica para este potencial, es decir, determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para una partícula, procederemos paso a paso utilizando la técnica de divide y vencerás: primero, consideraremos la interacción de la partícula con un salto de potencial; segundo, la propagación en un escalón constante del potencial; y, finalmente, ensamblaremos la solución completa como producto de cada solución parcial encontrada.

La figura 4.5(a) muestra la dispersión cuántica de la partícula en la i -ésima interfaz entre dos valores constantes sucesivos del potencial, cuya posición ha sido tomada en $x = 0$, sin pérdida de generalidad. Como se mostró en la sección 4.1, la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger en un potencial constante, sea V_i , es la

suma de dos términos exponenciales, ondas planas, una en dirección hacia la derecha y otra hacia la izquierda, $\psi_i = \psi_i^+ + \psi_i^-$, ilustradas en la figura 4.5(a) mediante flechas. La expresión matemática de estas funciones de onda planas (veáse también ec.2.16) es

$$\psi_i^\pm = A_i^\pm e^{\pm i k_i x}, \quad k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_i)}, \quad (\text{S4-3})$$

donde $i = \sqrt{-1}$, k_i es el momento de la partícula y A_i^\pm son constantes de integración que se determinan mediante la aplicación de las condiciones de contorno en la interfaz, es decir, la continuidad de la función de onda y de su derivada,

$$\psi_{i-1}(x=0) = \psi_i(x=0),$$

$$\psi'_{i-1}(x=0) = \psi'_i(x=0),$$

donde la prima indica derivación; estas expresiones nos dan las siguientes ecuaciones para las constantes de integración

$$A_{i-1}^+ + A_{i-1}^- = A_i^+ + A_i^-,$$

$$k_{i-1} A_{i-1}^+ - k_{i-1} A_{i-1}^- = k_i A_i^+ - k_i A_i^-,$$

que corresponden a un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver fácilmente. Utilizando notación matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_{i-1} & -k_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i-1}^+ \\ A_{i-1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_i & -k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i^+ \\ A_i^- \end{pmatrix}, \quad (\text{S4-4})$$

cuya solución matricial es

$$\begin{pmatrix} A_{i-1}^+ \\ A_{i-1}^- \end{pmatrix} = D_{i-1}^{-1} D_i \begin{pmatrix} A_i^+ \\ A_i^- \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_i & -k_i \end{pmatrix}. \quad (\text{S4-5})$$

Se denomina matriz de dispersión de la onda a la matriz $D_{i-1}^{-1} D_i$ asociada a la i -ésima interfaz.

Una vez la partícula ha cruzado la i -ésima interfaz, se propaga sujeta al potencial constante V_i durante una distancia d_i hasta encontrar la siguiente interfaz. Usando la notación mostrada en la figura 4.5(b), la función de onda plana propagante se escribe como

$$\tilde{\psi}_i^\pm = A_i^\pm e^{\pm i k_i d_i} e^{\pm i k_i x} = \tilde{A}_i^\pm e^{\pm i k_i x}, \quad (\text{S4-6})$$

lo que permite definir una matriz de propagación de la onda, P_i , definida como

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{i-1}^+ \\ \tilde{A}_{i-1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_i d_i} & 0 \\ 0 & e^{-ik_i d_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i^+ \\ A_i^- \end{pmatrix} = P_i \begin{pmatrix} A_i^+ \\ A_i^- \end{pmatrix}. \quad (\text{S4-7})$$

Las matrices de dispersión y de propagación de ondas permiten resolver el problema de la dispersión de una partícula cuántica en un potencial constante a trozos con N pozos de potencial como el mostrado en la figura 4.4. Para ello se utiliza un procedimiento iterativo como el siguiente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} &= D_0^{-1} D_1 \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_1^- \end{pmatrix} = D_0^{-1} D_1 P_1 D_1^{-1} D_2 \begin{pmatrix} A_2^+ \\ A_2^- \end{pmatrix} \\ &= D_0^{-1} D_1 P_1 D_1^{-1} D_2 P_2 D_2^{-1} D_3 \begin{pmatrix} A_3^+ \\ A_3^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cuya forma más general es

$$\begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{N+1}^+ \\ A_{N+1}^- \end{pmatrix}, \quad M = D_0^{-1} \left(\prod_{i=1}^N D_i P_i D_i^{-1} \right) D_{N+1}. \quad (\text{S4-8})$$

Para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para la dispersión de una partícula cuántica que incide desde la izquierda en un potencial constante a trozos formado por N pozos de potencial se puede utilizar fácilmente el método de matrices de transferencia. En dicho método, el potencial viene caracterizado por una matriz M dada por

$$\begin{pmatrix} A_0^+ \\ A_0^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{S4-9})$$

donde se ha tenido en cuenta el hecho de que la partícula tras atravesar el potencial sólo se propaga hacia la derecha, de forma tal que $A_{N+1}^- = 0$. En dicho caso, los coeficientes de reflexión y transmisión, definidos en la sección 4.2, vienen dados por

$$R = \frac{|A_0^-|^2}{|A_0^+|^2} = \frac{|M_{21}|^2}{|M_{11}|^2}, \quad \text{y} \quad T = \frac{k_{N+1} |A_{N+1}^+|^2}{k_0 |A_0^+|^2} = \frac{k_{N+1}}{k_0 |M_{11}|^2}, \quad (\text{S4-10})$$

respectivamente.

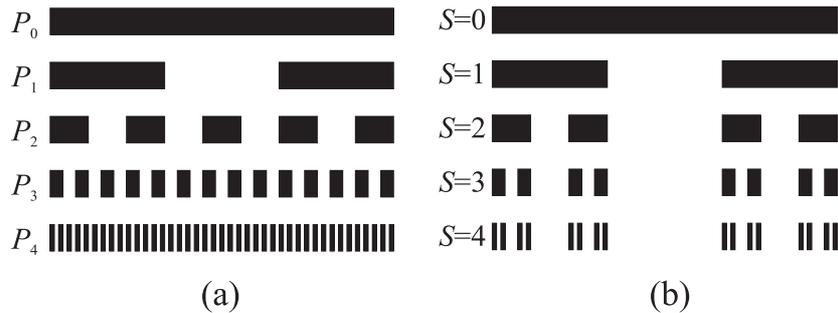


Figura 4.6: Potencial periódico finito (a) y potencial prefractal tipo conjunto de Cantor (b). Las diferentes regiones representan un valor nulo del potencial en las zonas blancas y un valor constante V del potencial en las regiones negras.

4.2. Dispersión cuántica en potenciales fractales

Como ejemplo de la resolución del problema de dispersión para un potencial constante a trozos, consideraremos el potencial fractal más simple, el generado por el conjunto (triádico) de Cantor, mostrado en la figura 4.6(b). El conjunto de Cantor se puede obtener fácilmente mediante el siguiente procedimiento iterativo. En el primer paso ($S = 0$) se toma un segmento de longitud unidad. En el siguiente ($S = 1$) se divide el segmento en tres partes iguales de longitud $1/3$ y se elimina la parte central. En general, en el paso S -ésimo, encontramos 2^S segmentos de longitud 3^{-S} con $2^S - 1$ huecos (segmentos eliminados) entre ellos. En el siguiente paso, el $(S + 1)$ -ésimo, se dividen cada uno de estos segmentos en tres partes iguales de longitud $3^{-(S+1)}$ y se elimina la parte central de cada uno. En la figura 4.6(b), en aras a clarificar el procedimiento, se muestran solamente los cuatro primeros pasos.

Debemos destacar que en el paso S -ésimo, el conjunto de Cantor es un prefractal que puede interpretarse como una distribución casi-periódica de segmentos que puede obtenerse eliminando determinados segmentos en una distribución periódica finita, como la mostrada en la figura 4.6(a). Esta distribución en su P_M -ésimo paso está formada por $(3^M - 1)/2 + 1$ barreras de potencial de longitud 3^{-M} , separadas por pozos de potencial de la misma longitud. Esta distribución periódica finita está caracterizada por su "periodo" (Λ) que se calcula fácilmente dando lugar a $2 \cdot 3^{-M}$.

El problema de la dispersión de partículas tanto en el potencial periódico finito

como en el prefractal de Cantor se pueden resolver fácilmente mediante el método numérico de las matrices de transferencia. Para comparar adecuadamente los resultados obtenidos para ambos potenciales conviene normalizar la energía de la partícula y la altura de las barreras de potencial, V , mediante el periodo de la estructura periódica, Λ , introduciendo las variables adimensionales

$$\phi = \Lambda \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \phi_V = \Lambda \frac{\sqrt{2mV}}{\hbar}.$$

Consideremos primero la dispersión en el potencial periódico finito. El coeficiente de reflexión, R , obtenido para tres periodos diferentes se ha representado en la figura 4.7. Esta figura muestra claramente como el coeficiente de reflexión se aproxima a la unidad conforme el número de periodos crece, ilustrando el proceso de aparición de la banda prohibida (bandgap) que caracteriza al potencial periódico (infinito) en el modelo de Kronig-Penney para un sólido unidimensional. Esta banda prohibida está localizada en el intervalo $3,2519 < \phi < 3,6222$, valor obtenido numéricamente para un potencial con barreras de altura normalizada $\phi_V = 2$.

En el potencial periódico (infinito), las partículas con energía en la banda prohibida no pueden propagarse, por lo que el coeficiente de transmisión en dicho intervalo es nulo ($R = 1$), con lo que su función de onda, que está descrita por el teorema de Bloch, véase la sección 4.7 que se caracteriza por un número de onda, k , complejo. Tales ondas se denominan evanescentes. Por el contrario, para el potencial periódico finito, como el mostrado en la figura 4.7, la probabilidad de transmisión de la partícula por efecto túnel no es exactamente nula, aunque sí extremadamente pequeña conforme el periodo disminuye. El valor $R = 1$ no se alcanza nunca para el potencial periódico finito (siempre $R < 1$), pero la resolución gráfica vertical de la figura 4.7(c) no permite destacar este hecho.

Consideremos ahora la dispersión en un potencial prefractal tipo Cantor. La figura 4.8 muestra el coeficiente de reflexión para potenciales prefactales con $S = 2$ (a), $S = 3$ (b) y $S = 4$ (c), en la región de energías alrededor de la primera banda prohibida para un potencial periódico (infinito) con el mismo periodo. Se observa claramente como el coeficiente de reflexión para el S -ésimo prefractal es una versión modulada del asociado al $(S - 1)$ -ésimo, tal que cada pico ancho en la S -ésimo prefractal es sustituido por tres picos más estrechos y esbeltos en el $(S + 1)$ -ésimo, es decir, muestra un comportamiento auto-semejante característico del potencial fractal de Cantor.

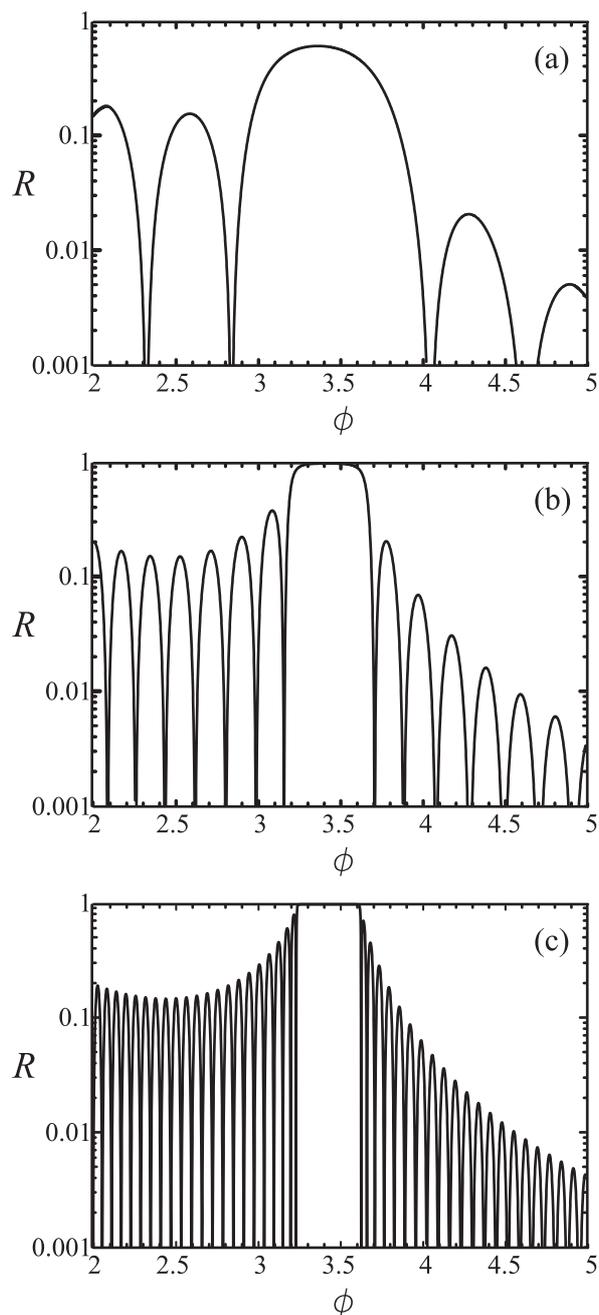


Figura 4.7: Coeficiente de reflexión para la dispersión de una partícula en los potenciales periódicos finitos P_2 (a), P_3 (b), y P_4 (c), en función de la energía normalizada ϕ para un potencial de altura normalizada $\phi_V = 2$.

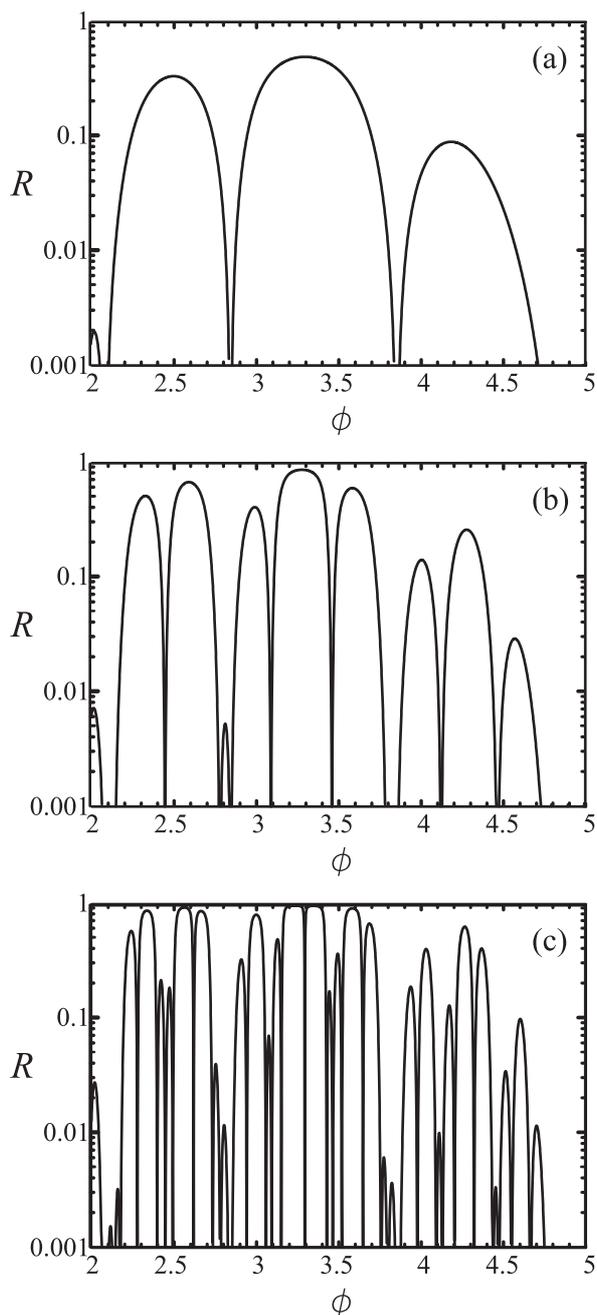


Figura 4.8: Coeficiente de reflexión para la dispersión de una partícula en potenciales prefractales tipo Cantor para $S = 2$ (a), $S = 3$ (b), y $S = 4$ (c) en función de la energía normalizada ϕ y para un potencial de altura normalizada $\phi_V = 2$.

Como se observa en la figura, valores nulos del coeficiente de reflexión aparecen a ciertas energías discretas, por ejemplo, en la región de la primera banda prohibida. En otras zonas la reflexión es casi total. Comparando las figuras 4.7 y 4.8, se observa que el número de ceros dentro del intervalo de la banda prohibida crece conforme lo hace el orden del prefractal. Estos ceros representan resonancias debidas a la presencia de "defectos" en el potencial periódico finito, es decir, la ausencia de ciertas barreras de potencial, las que caracterizan el potencial (casi-periódico) fractal. En el límite $S \rightarrow \infty$, el coeficiente de reflexión para el potencial fractal de Cantor en el intervalo mostrado en la figura 4.8 se aproximará a la unidad con ciertas resonancias muy delgadas distribuidas en forma aparentemente desordenada.

Con objeto de cuantificar la auto semejanza del coeficiente de reflexión para el potencial fractal mostrado en la figura 4.8, calcularemos el valor del coeficiente de auto-correlación. Una función general $f(x)$ es auto-semejante con respecto a un punto x_0 en su dominio, sea $[x_1, x_2]$, si permanece inalterada cuando se re-escala dicho dominio manteniendo fijo el punto x_0 , es decir, si

$$f\left(x_0 + \frac{x - x_0}{\gamma}\right) = \gamma^\alpha f(x),$$

donde γ es el factor de escala y α es llamado el exponente de escala. Se define el coeficiente de correlación con respecto al punto x_0 como

$$C(\gamma) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) f(x_0 + (x - x_0)/\gamma) dx}{\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \cdot \int_{x_1}^{x_2} f^2(x_0 + (x - x_0)/\gamma) dx}}$$

El lector notará que $C(\gamma) = 1$ para una función auto-semejante con respecto a x_0 .

El coeficiente de correlación, con respecto al punto $x_0 = 2$, para los coeficientes de reflexión de ambos potenciales, el periódico (con $P = 3$) y el prefractal ($S = 3$), mostrados en las figuras 4.7(c) y 4.8(c), se muestran en las figuras 4.9(a) y (b), respectivamente. La integración se ha realizado en el intervalo $[x_1, x_2] = [2, 5]$. Se ha utilizado en las abscisas una escala logarítmica con base 3 para facilitar la interpretación de las figuras. En la figura 4.9(b) se observan claramente máximos locales del coeficiente de correlación para el potencial fractal localizados en $\gamma = 3$ y 9, lo que corrobora la auto-semejanza del coeficiente de reflexión como consecuencia de la propia auto-semejanza del potencial cuántico prefractal.

Para el potencial periódico finito, el coeficiente de correlación, mostrado en la figura 4.9(a), no muestra máximos locales significativos, excepto cierta pequeña modulación para valores pequeños de γ debido a los lóbulos del coeficiente de reflexión que aparecen alrededor de la banda prohibida, véase la figura 4.7(c). Por tanto, la figura 4.9(a) confirma que el coeficiente de reflexión para el potencial periódico finito no es auto-semejante. El valor constante de la función de correlación para $\gamma > 8$ es un comportamiento espurio debido al intervalo de integración utilizado, ya que para dichos valores del escalado el valor $R \approx 1$ en la banda prohibida ocupa todo el intervalo de integración considerado. Este comportamiento espurio desaparece si se considera un intervalo mayor.

Los resultados presentados en este suplemento son una versión revisada y ampliada de los publicados en el artículo "A transfer matrix method for the analysis of fractal quantum potentials", Juan A. Monsoriu, Francisco R. Villatoro, María J. Marín, Javier F. Urchueguía y Pedro Fernández de Córdoba, *European Journal of Physics*, vol. 26, pp. 603-610, 2005.