

# DISEÑO DE LENTES DIFRACTIVAS FRACTALES

Fernando Giménez<sup>1</sup>, Juan A. Monsoriu<sup>2</sup>, Walter W. Furlan<sup>3</sup>, Pedro Andrés<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Metamática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia.*

<sup>2</sup> *Departamento de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia.*

<sup>3</sup> *Departamento de Óptica, Universitat de València, Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia).*

## 1. Introducción.

El diseño y el desarrollo de aplicaciones de elementos ópticos difractivos en ciencia y tecnología es un campo de la óptica que se halla en continuo proceso de evolución. En particular, en las últimas décadas se ha experimentado un creciente interés en el estudio de las propiedades de focalización de placas zonales (PZs) [1]. Se han estudiado PZs de diferentes geometrías y se han propuesto como elementos formadores de imágenes en sistemas que utilizan fuentes de iluminación que abarcan prácticamente todo el espectro electromagnético [2-4]. Los primeros elementos de este tipo inventados por Augustín Fresnel en 1866 han dado la clave para el diseño de las múltiples variantes de PZs que se conocen hoy en día. Las PZs de Fresnel están constituidas simplemente por zonas anulares concéntricas de igual área, alternativamente transparentes y opacas a la longitud de onda de la luz incidente. Así, una PZ de amplitud convencional, puede ser entendida como una estructura periódica a lo largo de la coordenada radial elevada al cuadrado.

Las placas zonales fractales (PZFs) son un nuevo tipo de placas zonales desarrollado recientemente por nuestro equipo de investigación [5,6]. Éstas se caracterizan porque en su diseño la estructura periódica antes mencionada es sustituida por una estructura *fractal* (p.ej. en nuestro primer trabajo utilizamos una secuencia basada en el conjunto de Cantor triádico). Las PZFs presentan múltiples focos a lo largo del eje óptico cuya posición coincide con los de la PZ convencional, pero sin embargo, la estructura interna de los focos posee un perfil fractal que reproduce la autosimilitud de la propia lente. Desde su invención las PZFs han sido utilizadas por diversos grupos de investigación que trabajan en óptica difractiva [7,8] y además han inspirado el diseño de otros dispositivos fotónicos, tales como, placas zonales fractales en espiral [9], fibras ópticas de sección fractal [10] y cribas de fotones fractales [11].

Con el fin de generalizar el procedimiento del diseño de lentes difractivas fractales y otras de perfil en general no periódico, en este trabajo presentamos una nueva interfaz gráfica generada en MATLAB GUI (Graphical User Interface) [12] que permite un diseño rápido y flexible pues presenta en una misma pantalla la función binaria generatriz, el aspecto final de la placa zonal resultante y el resultado de la simulación numérica de la irradiancia axial que ésta produce.

## 2. Fundamento teórico.

Para el cálculo de la respuesta axial de las lentes difractivas que se diseñarán consideraremos la teoría de la difracción dentro de la aproximación de Fresnel. Según esta aproximación la irradiancia producida en un punto del eje óptico por un sistema óptico con una pupila con simetría de revolución  $p(r)$  viene dada en función de la distancia  $z$  medida desde el plano de la pupila, por la siguiente expresión

$$I(z) = \left( \frac{2\pi}{\lambda z} \right)^2 \left| \int_0^a p(r) \exp\left(-i \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr \right|^2. \quad (1)$$

En la Ec. (1)  $a$  es la extensión máxima de la pupila y  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz empleada. Si expresamos a la función transmitancia de la pupila en términos de una nueva variable definida como

$$\zeta = \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 0.5, \text{ tal que } q(\zeta) = p(r), \quad (2)$$

utilizando la coordenada axial normalizada  $u = a^2/2\lambda z$ , la irradiancia a lo largo del eje se puede escribir como

$$I(u) = 4\pi^2 u^2 \left| \int_{-0.5}^{+0.5} q(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) d\zeta \right|^2. \quad (3)$$

Esto es, la irradiancia axial se puede expresar en términos de la transformada de Fourier de la función pupila generalizada  $q(\zeta)$ .

Para una FZ de Fresnel la función  $q(\zeta)$  es una función binaria periódica de período  $p$  [véase la Fig. 1(a)] que puede escribirse como

$$q(\zeta) = q_{ZP}(\zeta, p) = \text{rect}(\zeta) \text{ rect}\left[\text{mod}\left(\zeta + \frac{p-1}{2}, p\right) / p\right], \quad (4)$$

dónde la función  $\text{mod}(x, y)$  da el resto de la división de  $x$  por  $y$ . Si en lugar de ser periódica, asumimos que  $q(\zeta)$  tiene una estructura fractal y teniendo en cuenta las propiedades matemáticas de los fractales [13], la transformada de Fourier de  $q(\zeta)$  es decir la irradiancia axial, también tendrá propiedades de fractalidad. Consideremos por ejemplo, un conjunto de Cantor triádico cuya generación se muestra en la Fig. 1b). La estructura se genera a partir de una barra de longitud unidad en la etapa  $S=0$  dividiéndola en tres partes iguales y eliminando la parte central en la primera etapa ( $S=1$ ). En las etapas sucesivas  $S=2, 3$ , etc. el proceso se repite en cada una de las partes remanentes de la barra unidad original.

De un modo general si el número de zonas claras en la etapa  $S=1$  es  $N$ , para un nivel  $S$  arbitrario puede demostrarse que transmitancia de la PZF se expresa como un producto de transmitancias de placas zonales periódicas,

$$q(\zeta) = q_{FZP}(\zeta, N, S) = \prod_{i=0}^S q_{ZP}\left(\zeta, \frac{2}{(2N-1)^i}\right). \quad (5)$$

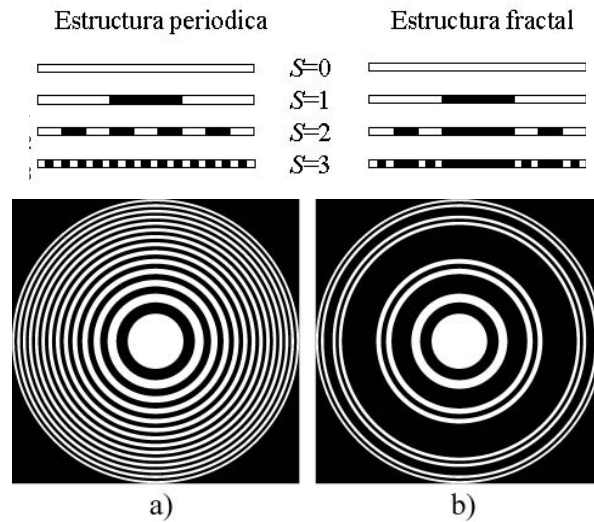


Figura 1: a) Placa zonal de Fresnel equivalente para  $N=2$ ,  $S=3$ . b) Placa zonal fractal para  $N=2$ ,  $S=3$ . En la figura superior, las barras blancas representa la zona de transmisión de la pupila respecto a la variable radial cuadrática.

Nótese además, que la PZF representada por la Ec. (5) puede entenderse como una placa zonal de Fresnel con período:

$$p(N, S) = 2 / (2N - 1)^S, \quad (6)$$

pero en la que se han eliminado algunas zonas claras. Este hecho puede comprobarse fácilmente observando la Fig. 1 en la que se muestra el caso particular de una pupila generada por un conjunto de Cantor triádico (es decir  $N=2$ , ya que el segmento inicial tiene 2 zonas claras) que se extiende hasta la tercera generación  $S=3$ .

### 3. La interfaz gráfica.

El uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza va tomando cada vez mayor importancia en los últimos años. El desarrollo progresivo de herramientas de software y de hardware hacen posible simular procesos físicos complejos en tiempo real, permitiendo la obtención de gráficos y tablas de manera inmediata a la introducción de datos por parte del usuario, lo cual puede

influir de manera muy positiva en el proceso de entendimiento y aprendizaje. En este marco, las llamadas interfaces gráficas de usuario (GUIs) son una buena herramienta que puede utilizarse tanto en investigación como enseñanza. En particular los GUIs permiten manejar de manera efectiva el uso de parámetros de entrada de forma que tengamos una retroalimentación (feedback) instantánea útil para el manejo e interpretación de los resultados.

En la Fig. 2 se muestra la interfaz gráfica GUI implementada en MATLAB para el computo de la irradiancia axial generada por lentes difractivas binarias de amplitud. MATLAB presenta un entorno de programación visual para realizar y ejecutar programas que necesiten un ingreso continuo de datos, que presenta las características básicas de programas como Visual Basic o Visual C++, pero mucho más asequibles que éstos para su utilización sobre todo en docencia. La aplicación consta de dos archivos *ZP design.m* y *ZP design.fig*. El primero es el ejecutable y el segundo es la parte gráfica.

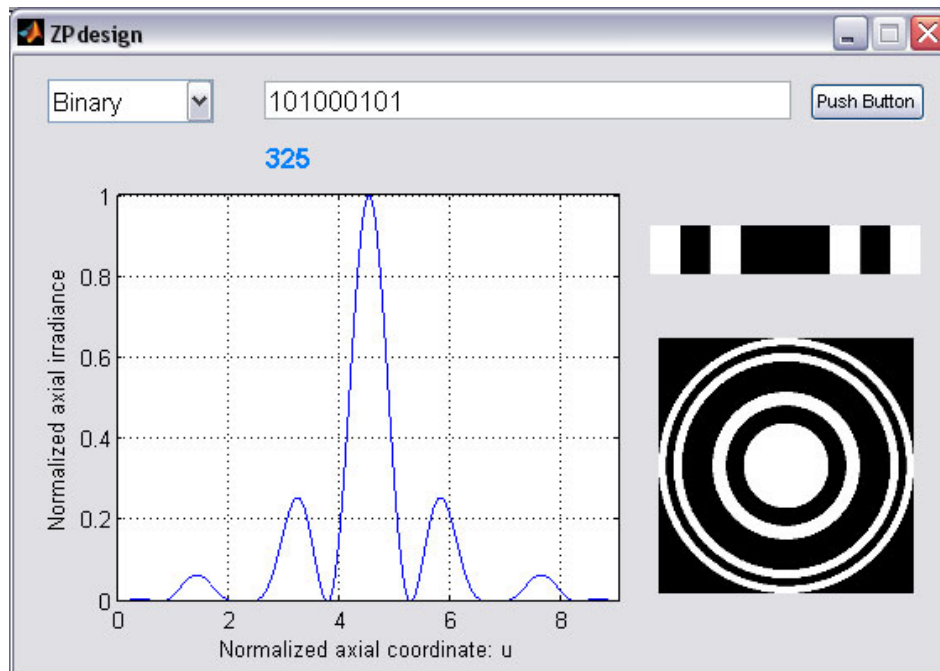


Figura 2: Interfaz gráfica GUI implementada para el computo de la irradiancia axial de lentes difractivas.

La transmitancia de la lente se introduce en la ventana superior en modo binario o decimal. En modo binario, el conjunto de “1” y “0” introducidos representan la secuencia de zonas anulares transparentes y opacas, respectivamente, de la lente. Así por ejemplo, la secuencia de Cantor para  $N=2$ ,  $S=3$ , (véase Fig. 1b) quedaría codificada en 101000101 y la estructura equivalente periódica con 101010101 (véase Fig. 1a). En formato decimal, el programa traduce primero el número introducido a código binario. Así, el número decimal 325 representaría la secuencia fractal anterior, mientras que el 341 representaría la secuencia periódica equivalente.

En la ventana superior derecha, el programa muestra la función  $q(\zeta)$  codificada en blanco cuando  $q(\zeta)=1$  y en negro para  $q(\zeta)=0$ . Con el cambio de variables de la Ec. (2), el programa muestra en la parte inferior derecha la transmitancia de la lente binaria considerada. La función  $q(\zeta)$  se construye a partir de los valores  $\zeta_j := -0.5 + j/n$  para  $j=0, 1, \dots, n$  donde  $n$  es el número de zonas (transparentes y opacas) de la lente, de forma que

$$q = \sum_{j=1}^n q_j \chi_{[\zeta_{j-1}, \zeta_j]}, \quad (7)$$

donde

$$\chi_{[\zeta_{j-1}, \zeta_j]} = \begin{cases} 0 & \zeta \notin [\zeta_{j-1}, \zeta_j] \\ 1 & \zeta \in [\zeta_{j-1}, \zeta_j] \end{cases} \quad (8)$$

y  $q_j$  toma los valores 0 para las zonas opacas ó 1 para las zonas transparentes. En el programa que hemos diseñado la función  $I(u)$  se ha calculado directamente a partir de la expresión de  $q$  anterior, por integración numérica directa de

$$\begin{aligned} & \int_{-0.5}^{+0.5} q(\zeta) \exp(-i2\pi u \zeta) d\zeta = \\ & = \sum_{j=1}^n \frac{iq_j}{2\pi u} \left[ \exp(-i2\pi u \zeta_j) - \exp(-i2\pi u \zeta_{j-1}) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

La irradiancia,  $I(u)$ , por ser el espectro de una función binaria en general, dará lugar a los diferentes focos de la placa zonal. La extensión axial de cada

foco será una función periódica en la variable normalizada  $u$  cuyo período coincidirá con el número total de zonas introducidas, sin embargo por simplicidad el programa muestra únicamente la irradiancia axial normalizada para el primer período de dicha función que corresponde al foco principal de la lente difractiva que como puede demostrarse [5,6] cumplen la siguiente relación:

$$f(N, S) = \frac{a^2}{\lambda(2N-1)^S}. \quad (10)$$

tanto para una PZF como para su PZ de Fresnel equivalente.

#### 4. Resultados numéricos.

Como hemos mencionado anteriormente la interfaz gráfica es una herramienta muy útil para el análisis y el diseño de lentes difractivas binarias de amplitud. Como un ejemplo de aplicación lo utilizaremos para evaluar la respuesta axial proporcionada por diferentes PZFs y procederemos a comparar los resultados con los que se obtendrían con una placa zonal de Fresnel “equivalente”. Ejemplos de resultados para diferentes etapas de desarrollo  $S$  y para  $N=2$  se muestran en la Fig. 3.

Nótese que en cada paso la escala para la coordenada axial cambia en un factor  $2N-1=3$ . Puede observarse que la posición de los lóbulos centrales de los focos coinciden para ambos tipos de lentes pero la estructura de los focos de la PZF presenta un perfil claramente fractal. De hecho los patrones de la parte superior de la Fig. 3 son auto-similares. Esto significa que la irradiancia axial reproduce la auto-similaridad propia de la PZF. De este modo, dada la relación existente entre las PZF y la irradiancia axial que estas producen al ser iluminadas por una onda plana, es posible sintetizar perfiles de irradiancia a lo largo del eje óptico que tengan una estructura fractal.

En la Fig. 4 se muestra el efecto que se produce sobre la respuesta axial de la lente fractal el aumento el número número de zonas con el parámetro  $N$  para un orden  $S$  fijo. Al aumentar  $N$ , pasando por los diferentes conjuntos de Cantor conocidos como conjuntos de Cantor poliádicos, se reduce considerablemente el ancho relativo del foco principal y de los dos focos secundarios originados por la estructura fractal a cada lado de éste, aumentando así la resolución axial la lente.

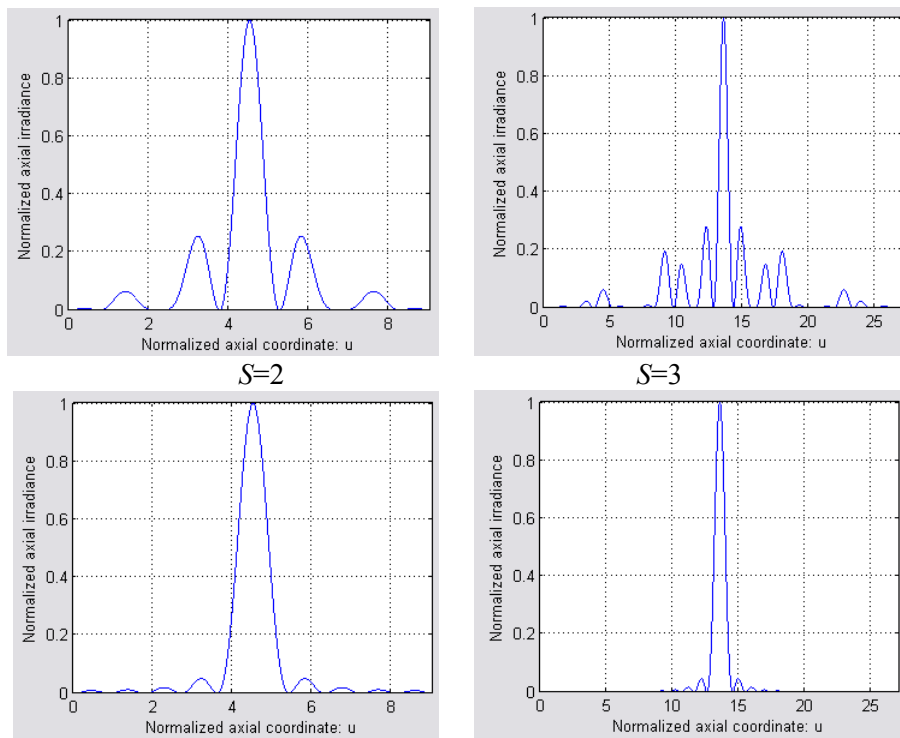


Figura 3: Irradiancia axial normalizada vs. coordenada axial obtenida para PZFs de  $N=2$  con distintos valores de  $S$  (parte superior) y para la placa zonal de Fresnel “equivalente” (parte inferior).

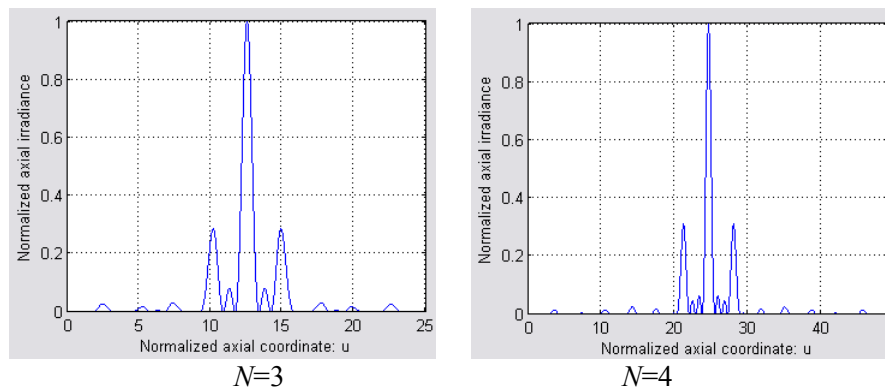


Figura 4: Irradiancia axial normalizada vs. coordenada axial obtenida para PZFs de  $S=2$  con distintos valores de  $N$ .



Estos ejemplos muestran claramente como el programa permite de una manera muy rápida (el resultado de los calculos para cada caso se obtiene de forma inmediata) el análisis de la influencia sobre la irradiancia axial de diferentes parámetros de diseño de una lente difractiva binaria. Por esta característica, el programa resulta muy útil cuando se desean obtener distribuciones particulares de la irradiancia a lo largo del eje. Por otra parte, desde un punto de vista didácto, permite ejemplificar ciertos aspectos de la teoría de la difracción, ya es posible explicar la aparición de los máximos y mínimos axiales como el resultado de las múltiples interferencias entre las ondas provenientes de las diferentes zonas de la lente.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (DPI 2006-8309), la Generalitat Valenciana (GV/2007/239) y por el “Programa de Incentivo a la Investigación 2005” de la Universidad Politécnica de Valencia.

## Bibliografía

- [1] J. Ojeda-Castañeda y C. Gómez-Reino, Eds., *Selected papers on zone plates*, SPIE Optical Engineering Press, Washington, 1996.
- [2] S. Wang y X. Zhang. *Opt. Photon. News* **13**, 59 (2002).
- [3] Y Wang, W. Yun y C. Jacobsen. *Nature* **424**, 50-53 (2003).
- [4] L. Kipp, M. Skibowski, R. L. Johnson, R. Berndt, R. Adelung, S. Harm y R. Seemann. *Nature* **414**, 184-188 (2001).
- [5] G. Saavedra, W.D. Furlan y J.A. Monsoriu. *Opt. Lett.* **28**, 971-973 (2003).
- [6] J.A. Monsoriu, G. Saavedra y W.D. Furlan. *Opt. Express* **12**, 4227-4234 (2004).
- [7] J. A. Davis, L. Ramirez, J. A. Rodrigo Martín-Romo, T. Alieva, and M. L. Calvo. *Opt. Lett.* **29**, 1321-1323 (2004).
- [8] H.-T. Dai, X. Wang, K.-S. Xu. *Chin. Phys. Lett.* **22**, 2851-2854 (2005).
- [9] S. H. Tao, X.-C. Yuan, J. Lin, and R. Burge. *Appl. Phys. Lett.* **89**, 031105 (2006).
- [10] C. Martelli and J. Canning. *Opt. Express* **15**, 4281-4286 (2007).
- [11] F. Giménez, J. A. Monsoriu, W. D. Furlan, and A. Pons. *Opt. Express* **14**, 11958-11963 (2006).
- [12] C. Depcik y D.N. Assanis, *Comput. Appl. Eng. Educ.* **13**, 48-59 (2005).
- [13] J. Uozumi y T. Asakura. *Fractal Optics*, Current Trends in Optics Ch. 6, J.C. Dainty Ed., Academic Press, London (1994).